جامعة البعث | امتحان مقرر نظرية الاحتمالات | الاسم :

كلية العلوم | لطلاب السنة الثالثة رياضيات | المدة : 90 دقيقة

قسم الرياضيات | الدورة التكميلية للعام الدراسي 2015 – 2016 | الدرجة : 100

السؤال الأول(40 درجة):

بفرض أنَّ $X\ ,Y$ متغيران عشوائيان أسّيان مستقلان لهما نفس الوسيط $\lambda=\frac{1}{2}$ ، والمطلوب:

❶ عيِّن التوزيع الاحتمالي المشترك لـ $X\ ,Y$. ❷ عيِّن الدالة التوزيعيَّة المشتركة لـ $X\ ,Y$.

❸ احسب $P\left(X<2\right)\quad ,\ P\left(X<2,Y<2\right)$. ❹ بفرض أنَّ $X_1,X_2,\ldots\ldots,X_n$ عينة عشوائية لـ X عندئذٍ عيِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i$ اعتماداً على أسلوب الدالة المولدة. ❺ عيِّن التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين $U=\frac{X}{Y}\quad ,\ V=Y$ ، ثمَّ عيِّن توزيع المتغيِّر U. ❻ عيِّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Z=\min\left\{X\ ,Y\right\}$.

❼ عيِّن الدالة المولدة للعزوم المشتركة لـ $X\ ,Y$.

السؤال الثاني(60 درجة):

أ) بفرض أنَّ $X\ ,Y$ متغيران عشوائيان هندسيان مستقلان ولهما نفس الوسيط $p=\frac{1}{2}$ ، والمطلوب:

❶ عيِّن التوزيع الاحتمالي المشترك لـ $X\ ,Y$. ❷ عيِّن الدالة التوزيعية المشتركة لـ $X\ ,Y$.

❸ عيَّن التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=\min\left\{X\ ,Y\right\}$ ، ثمَّ عيِّن كل من التوقع والتباين والدالة المميزة والدالة التوزيعية لـ Z .

❹ احسب $P\left(X>1\right),P\left(X>1,Y>1\right)$. ❺ احسب $P\left(X+Y=n\right)$.

❻ احسب $V\left(2X+4Y\right),E\left(2X+4Y\right),COV\left(2X\ ,2Y\right),\rho\left(2X\ ,2Y\right)$

ب) ليكن X متغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ والمطلوب :

❶ عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y=\tan x$. ❷ عين الدالة التوزيعية لـ Y ❸ عين الدالة المميزة لـ Y .

❹ بفرض $Y_1,Y_2,\ldots\ldots,Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ عين الدالة المميزة لـ $\overline{Y}$ ، ثمَّ عين التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{Y}$.

❺ احسب $P\left(-1<\overline{Y}<1\right)$. ❻ بفرض Z متغير عشوائي مستقل عن Y وله نفس التوزيع عندئذٍ عيِّن الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y و Z . ❼ احسب $P\left(Y<1\ ,Z<1\right)$.

ج) بفـرض أنَّ: $x=0,1,\ldots\ldots,y\quad ;\quad P\left(x/y\right)=C_x^y\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{y-x}$ توزيـع احتمـالي شـرطي لـ X حيـث $Y=y$

والمطلوب: عيِّن $E\left(X/Y=4\right)\ ,\ V\left(X/Y=4\right),M_{X/Y=4}\left(t\right)$.

حمص في 22/ 8/2016 | انتهت الأسئلة | مدرس المقرر: د.هيثم فرح

السؤال الأول:

بما أنَّ X , Y متغيران عشوائيان أسّيان **مستقلان** لهما نفس الوسيط $\lambda = \frac{1}{2}$ ، فإنَّ:

❶ التوزيع الاحتمالي المشترك (دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة) لـ X , Y هو :

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \left[\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right]\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}\right] = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)} \; ; \; 0 < x < \infty \; , \; 0 < y < \infty$$

❷ الدالة التوزيعية المشتركة لـ X , Y :

$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(x) = \left[1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right]\left[1 - e^{-\frac{1}{2}y}\right] \; ; 0 < x < \infty \; , \; 0 < y < \infty$$

❸ حساب $P(X < 2)$, $P(X < 2, Y < 2)$:

$$P(X < 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{1}{2}(2)}\right] = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$P(X < 2, Y < 2) = F(2,2) = \left[1 - e^{-\frac{1}{2}(2)}\right]\left[1 - e^{-\frac{1}{2}(2)}\right] = e^{-1}.e^{-1} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

❹ بفرض أنَّ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لـ X ، والمطلوب تعيِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ اعتماداً على أسلوب الدالة المولدة:

$$M_Z(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_X(t) = \left[M_X(t)\right]^n = \left[(1-2t)^{-1}\right]^n = (1-2t)^{-n}$$

وبالتالي فإنَّ $Z \sim G\left(n, \frac{1}{2}\right)$ أي من النمط الغماوي بالوسيطين $\lambda = n$, $\alpha = \frac{1}{2}$ (كما يمكن القول أنَّ $Z \sim \chi^2(n)$ أي من النمط كاي مربع بدرجة حرية n).

❺ تعيَّن التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين $U = \frac{X}{Y}$, $V = Y$ ، ثمَّ تعيِّن توزيع المتغيِّر U :

لدينا $V = Y$, $U = \frac{X}{Y}$ ، وبالتالي فإن : $X = U.V$, $Y = V$ ومنه فالمشتقات الجزئية هي:

$\frac{\partial Y}{\partial V} = 1$, $\frac{\partial Y}{\partial U} = 0$, $\frac{\partial X}{\partial V} = U$, $\frac{\partial X}{\partial U} = V$ ، ومنه نجد أنَّ:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & U \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = V \quad \Rightarrow |J| = |V| = V$$

وبالتالي فإن دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين V , U تعطى بالعلاقة:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(x,y)\left|J\right|_{\substack{x=u.v \\ y=v}} \quad \ldots\ldots\ldots(*)$$

ولكن بما أن المتغيرين العشوائيين Y , X مستقلين فإن دالة الكثافة المشتركة لهما هي:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{x+y}{2}\right)} \quad ; \quad x>0,\ y>0$$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$f(u,v)=\left[\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{x+y}{2}\right)}v\right]_{\substack{x=u.v\\ y=v}}=\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{u.v+v}{2}\right)}v=\frac{1}{4}e^{-v\left(\frac{u+1}{2}\right)}v=\frac{1}{4}v\,e^{-v\left(\frac{u+1}{2}\right)} \quad ;\ u>0\ ,\ v>0$$

ومنه فإن دالة الكثافة الهامشية لـ U هي:

$$f_U(u)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4}v\,e^{-v\left(\frac{u+1}{2}\right)}\,dv$$

ولإيجاد هذا التكامل نفرض أنَّ:

$$z=v\left(\frac{u+1}{2}\right)\ \Rightarrow v=\frac{2}{(u+1)}z\ \Rightarrow dv=\frac{2}{(u+1)}dz$$

كما نلاحظ أنَّه عندما $v=0$ فإنَّ $z=0$ وعندما $v=\infty$ فإنَّ $z=\infty$، وبالتالي يصبح التكامل الأخير بالشكل:

$$f_U(u)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{2}{(u+1)}z\right)e^{-z}\left(\frac{2}{(u+1)}dz\right)=\frac{1}{(u+1)^2}\int_0^{\infty}z\,e^{-z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{(u+1)^2}\int_0^{\infty}z^{2-1}e^{-z}\,dz=\frac{\Gamma(2)}{(u+1)^2}=\frac{1}{(u+1)^2}\ \Rightarrow\ \boxed{f_U(u)=\frac{1}{(u+1)^2}\quad ;\ u>0}$$

❻ تعيِّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Z=\min\{X,Y\}$:

$$F_Z(z)=P(Z<z)=1-P(Z\geq z)=1-P(\min\{X,Y\}\geq z)=1-P(X\geq z,Y\geq z)$$

$$=1-P(X\geq z)P(Y\geq z)=1-[1-P(X<z)][1-P(Y<z)]$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=1-\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}z}\right)\right]\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{2}z}\right)\right]$$

$$=1-\left(e^{-\frac{1}{2}z}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}z}\right)=1-e^{-z}\quad ;\ z>0$$

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{d}{dz}\left(1-e^{-z}\right)=e^{-z}\ \Rightarrow\ \boxed{f_Z(z)=e^{-z}\quad ;\ z>0}$$

من الواضح أنَّ المتغير العشوائي Z من النمط الأسي بالوسيط $\lambda=1$.

❼ تعيِّن الدالة المولدة للعزوم المشتركة لـ X , Y :

بما أنَّ X , Y متغيران عشوائيان أسِّيان **مستقلان** لهما نفس الوسيط $\lambda=\frac{1}{2}$، فإنَّ:

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=M_X(t_1).M_Y(t_2)=(1-2t_1)^{-1}(1-2t_2)^{-1}=\frac{1}{(1-2t_1)(1-2t_2)}$$

السؤال الثاني:

أ) بما أنَّ X , Y متغيران عشوائيان هندسيان **مستقلان** ولهما نفس الوسيط $p=\dfrac{1}{2}$ ، فإنَّ:

❶ التوزيع الاحتمالي المشترك(القانون الاحتمالي المشترك) لـ X , Y هو:

$$P(x,y)=P_X(x).P_Y(y)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^y\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y+2}\ ;\ \begin{matrix} x=0,1,2,.... \\ y=0,1,2,.... \end{matrix}$$

❷ الدالة التوزيعية المشتركة لـ X , Y هي:

$$F(x,y)=F_X(x).F_Y(2)=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\right]\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}\right]\ ;\ \begin{matrix} x=0,1,2,.... \\ y=0,1,2,.... \end{matrix}$$

❸ التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=\min\{X,Y\}$:

$$\begin{aligned}
P_Z(z)&=P\{Z\geq z\}-P\{Z>z\}=P\{\min\{X,Y\}\geq z\}-P\{\min\{X,Y\}>z\}\\
&=P\{X\geq z,Y\geq z\}-P\{X>z,Y>z\}\\
&=P\{X\geq z\}P\{Y\geq z\}-P\{X>z\}P\{Y>z\}\\
&=[1-P\{X<z\}][1-P\{Y<z\}]-[1-P\{X\leq z\}][1-P\{Y\leq z\}]\\
&=[1-F_X(z-1)][1-F_Y(z-1)]-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\\
&=\left[1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^z\right)\right]\left[1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^z\right)\right]-\left[1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{z+1}\right)\right]\left[1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{z+1}\right)\right]\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2z}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2z+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2z}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\left[1-\frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^z=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^z\ ;\ z=0,1,2,...
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_Z(z)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^z\ ;\ z=0,1,2,...}$$

من الواضح أنَّ المتغير العشوائي Z من النمط الهندسي بالوسيط $p=\dfrac{3}{4}$ ، وبالتالي فإنَّ:

التوقع لـ Z يساوي:

$$E(Z)=\frac{q}{p}=\frac{(1/4)}{(3/4)}=\frac{1}{3}$$

التباين لـ Z يساوي:

$$V(Z)=\frac{q}{p^2}=\frac{(1/4)}{(3/4)^2}=\frac{(1/4)}{(9/16)}=\frac{4}{9}$$

الدالة المميزة لـ Z تساوي:

$$\psi_Z(t)=\frac{p}{1-qe^{it}}=\frac{(3/4)}{1-(1/4)e^{it}}=\frac{3}{4-e^{it}}$$

الدالة التوزيعية لـ Z تساوي:

$$F_Z(z)=1-q^{z+1}=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{z+1} \quad ; \; z=0,1,2,....$$

❹ حساب $P(X>1)\,,\,P(X>1,Y>1)$:

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F_X(1)=1-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}\right]=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(Y>1)=1-P(Y\le 1)=1-F_Y(1)=1-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}\right]=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X>1,Y>1)=P(X>1)P(Y>1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

❺ احسب $P(X+Y=n)$.

إنَّ الحدث $\{X+Y=n\}$ يكتب بالشكل:

$$\{X+Y=n\}=\bigcup_{i=0}^{n}\{X=i\,,Y=n-i\}$$

وهذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى ، ومتنافية مثنى مثنى فإنَّ:

$$P\{X+Y=n\}=P\left\{\bigcup_{i=0}^{n}\{X=i\,,Y=n-i\}\right\}=\sum_{i=0}^{n}P\{X=i\,,Y=n-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}P_{(X,Y)}(i\,,n-i)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+n-i+2}=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\sum_{i=0}^{n}(1)=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\Rightarrow$$

$$\boxed{P\{X+Y=n\}=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}$$

❻ احسب $V(2X+4Y)\,,E(2X+4Y)\,,COV(2X\,,2Y)\,,\rho(2X\,,2Y)$

بما أنَّ $X\,,Y$ متغيران عشوائيان هندسيان **مستقلان** ولهما نفس الوسيط $p=\frac{1}{2}$، فإنَّ:

$$E(X)=\frac{q}{p}=\frac{(1/2)}{(1/2)}=1 \quad , \quad V(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{(1/2)}{(1/2)^2}=\frac{(1/2)}{(1/4)}=2 \;\Rightarrow$$

$$E(Y)=E(X)=1 \quad , \quad V(Y)=V(X)=2$$

وبالتالي فإنَّ:

$$V(2X+4Y)=4V(X)+16V(Y)=4(2)+16(2)=40$$

$$E(2X+4Y)=2E(X)+4E(Y)=2(1)+4(1)=6$$

$$COV(2X\,,2Y)=4COV(X\,,Y)=4(0)=0$$

$$\rho(2X\,,2Y)=\rho(X\,,Y)=0$$

ب)

❶ بما أن X متغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فإن دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالشكل:

$$f_X(x)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\pi}\quad ;\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

ولدينا:

$$y=\tan x\ \Rightarrow\ x=\arctan y\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+y^2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=\varphi^{-1}(y)}=\frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{1+y^2}\right|_{x=\arctan y}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\quad ;\ -\infty<y<+\infty$$

ومن الواضح أن Y هو متغير عشوائي من النمط كوشي بالوسيطين $a=1,\ b=0$.

❷ إنَّ الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي Y من النمط كوشي بالوسيطين $a=1,b=0$ تعطى بالعلاقة :

$$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\arctan(y)+\frac{1}{2}\quad ,\ -\infty<y<+\infty$$

❸ إنَّ الدالة المميزة للمتغير العشوائي Y من النمط كوشي بالوسيطين $a=1,b=0$ تعطى بالعلاقة :

$$\psi_Y(t)=e^{-a|t|}=e^{-|t|}\quad ;\ t\in\mathbb{R}$$

❹ لدينا أن $Y_1,Y_2,\dots\dots,Y_n$ عينة عشوائية لـ Y ، والمطلوب تعيين الدالة المميزة لـ $\overline{Y}$ ، ثم تعيين التوزيع الاحتمالي $\overline{Y}$.

$$\psi_{\overline{Y}}(t)=\psi_{\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)/n}(t)=\prod_{i=1}^{n}\psi_{Y_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\prod_{i=1}^{n}\psi_Y\left(\frac{t}{n}\right)=\left[\psi_Y\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=\left[e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\right]^n=$$

$$=\left[e^{-n\frac{|t|}{n}}\right]=e^{-|t|}=\psi_Y(t)$$

وهذا يعني أن لـ $\overline{Y}$ نفس الدالة المميزة لـ Y ، ومنه فإن للمتغير العشوائي $\overline{Y}$ نفس التوزيع الاحتمالي لـ Y ومنه فإن $\overline{Y}$ هو متغير عشوائي من النمط كوشي بوسيطين الأول $a=1$ والثاني $b=0$.

❺ حساب $P\left(-1<\overline{Y}<1\right)$:

$$P\left(-1<\overline{Y}<1\right)=F_{\overline{Y}}(1)-F_{\overline{Y}}(-1)=F_Y(1)-F_Y(-1)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\arctan(1)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\pi}\arctan(-1)+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\arctan(1)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

❻ لدينا Z متغير عشوائي مستقل عن Y وله نفس التوزيع والمطلوب تعين الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y و Z ، ثم حساب $P(Y>1, Z>1)$.

بما أنَّ Y و Z مستقلان فإن الدالة التوزيعية المشتركة هي جداء للدوال التوزيعية :

$$F(y,z)=F_Y(y)F_Z(z)=\left(\frac{1}{\pi}\arctan(y)+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\arctan(z)+\frac{1}{2}\right) \; ; \; y\in\mathbb{R} \; , z\in\mathbb{R}$$

❼ حساب $P(Y<1, Z<1)$:

$$P(Y<1, Z<1)=P(Y<1)P(Z<1)=F_Y(1)F_Z(1)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\arctan(1)+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\arctan(1)+\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{3}{4}\right]^2=\frac{9}{16}$$

ج) من الواضح أنَّ المتغير العشوائي الشرطي X حيث Y من النمط الثنائي بالوسيطين $n=y$ و $p=\frac{1}{2}$ وبالتالي فإنَّ:

التوقع الشرطي لـ X حيث Y هو:

$$E(X/Y=4)=np\big|_{y=3}=y\left(\frac{1}{2}\right)\Big|_{y=3}=4\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

التباين الشرطي لـ X حيث Y هو:

$$V(X/Y=4)=npq\big|_{y=4}=y\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Big|_{y=3}=4\left(\frac{1}{4}\right)=1$$

الدالة المولدة الشرطية لـ X حيث Y هو:

$$M_{(X/Y=4)}(t)=\left(q+pe^t\right)^n\Big|_{y=4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t\right)^y\Big|_{y=4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1+e^t\right)^4=\frac{1}{16}\left(1+e^t\right)^4$$

انتهت الأجوبة

أ.أحمد حاتم أبو حاتم

0947075489